12-03-2018

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$, $x \in \mathbb{R}$. Ποια $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία η δυναμοσειρά συγκλίνει.

$b_k = a_k \cdot x^k$ για $x=0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k = 0$

$(-R, R)$
$[-R, R)$
$(-R, R]$
$[-R, R]$

Πρόταση: Έστω ότι συγκλίνει για κάποιο $x \in \mathbb{R}$. Τότε αν $y \in \mathbb{R} : |y| < |x| \Rightarrow$
$\Rightarrow$ η $\sum a_k y^k$ συγκλίνει.

Απόδειξη: $a_k x^k$ συγκλίνει $\Rightarrow a_k x^k \to 0$, καθώς $k \to \infty$
Για $\varepsilon = 1 \Rightarrow (\exists k_0 \in \mathbb{N}) : |a_k x^k| \leq 1$, $(\forall k \geq k_0)$
$(\forall k \geq k_0)$, $|a_k y^k| \leq |a_k x^k| \leq |\frac{y}{x}|^k$
Η σειρά $\sum_{k=k_0} |\frac{y}{x}|^k$ συγκλίνει άρα ως $|\frac{y}{x}| < 1$

$\Rightarrow \sum |a_k y^k|$ συγκλίνει
$\Rightarrow$ η $\sum a_k y^k$ συγκλίνει απόλυτα.

Πρόταση: Δίνεται η δυναμοσειρά $\sum a_k x^k$ με ένα $x \in \mathbb{R}$ ώστε η $\sum a_k x^k$ αποκλίνει. Τότε αν $y : |y| > |x| \Rightarrow \sum a_k y^k$ αποκλίνει

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι $\sum a_k y^k$ συγκλίνει $\Rightarrow$
$\Rightarrow \sum |a_k x^k|$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum a_k x^k$ συγκλίνει άτοπο αφού $\sum a_k x^k$ αποκλίνει.

$R = \sup\{\{|x| : \sum a_n x^n$ συγκλίνει (στο x)$\}\}$

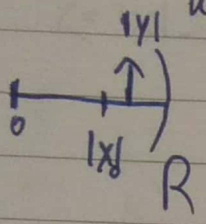
Πρόταση:

i) Η δυναμ. $\sum a_n x^n$ συγκλίνει στο $(-R, R)$, απόλυτα αποκλίνει

ii) για $x \notin [-R, R]$

iii) Δεν γνωρίζουμε

i) $|x_0| < R \Rightarrow \sum_n |a_n x_0^n|$ συγκλίνει (γιατί?)



$\underbrace{\{|x| : \sum a_n x^n \text{ συγκλίνει}\}}_{B \subseteq \mathbb{R}}$

$|x_0| < \sup$, $|x_0| < |y| \to \sum |a_n x_0^n|$

ii) $|x_0| > R$

$\Rightarrow (\exists y \in \mathbb{R}) : |x_0| > |y| > R$ $\qquad \sup\{|x| : \sum a_n x^n$ συγκλίνει$\}$

Θ.δ.ο. $\sum a_n x_0^n$ αποκλ. Αν συγκλίνει $\Rightarrow \sum a_n y^n$ συγκλίνει (Άτοπο εξ ορισμού)

Πρόταση: Δίνεται η δυναμοσειρά $\sum^{\infty} a_n x^n$. Αν $\exists \lim \sqrt[n]{|a_n|} = a \in [0, \infty]$ Τότε η ακτίνα $R = 1/a$.

Απόδειξη: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$ Για παράδ. υποθ. ότι $0 < a < \infty$

$\sqrt[n]{|b_n|} = (\sqrt[n]{|a_n|})|x| \xrightarrow{n \to \infty} a \cdot |x|$

$a|x| < 1 \Rightarrow \sum b_n$ συγκλ. απόλ.

$a|x| > 1 \Rightarrow \sum b_n$ αποκλ.

Για $a = 0$ συγκλίνει για κάθε αριθμό

$\alpha = +\infty \Rightarrow \sqrt[k]{|b_k|} \to +\infty \Rightarrow \exists k_0 \ \sqrt[k]{|b_k|} \geq 1, \ (\forall k \geq k_0)$
$\Rightarrow |b_k| \geq 1, \ (\forall k \geq k_0) \Rightarrow b_k \not\to 0 \Rightarrow \sum b_k = \sum \alpha_k x^k$ αποκλ.

$\mathbb{R} = 1/\lim \sqrt[k]{|\alpha_k|}$

Πρόταση: Δίνεται $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ και υποθ. ότι $\exists \lim_k \left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right| = \alpha \in [0, +\infty]$

$\rightarrow$ η ακτίνα της δυναμ.: $\mathbb{R} = 1/\alpha$

Μας ενδιαφέρει η σειρά $\sum b_k$, $b_k = \alpha_k x^k$

$$\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = \frac{|\alpha_{k+1} x^{k+1}|}{|\alpha_k x^k|} = \left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right| \cdot |x| \to \alpha |x|$$

$0 < \alpha < +\infty$

i) Αν $\alpha|x| < 1 \Rightarrow \sum b_k$ συγκλίνει απολ., δηλαδή ότι $|x| < 1/\alpha$

Αν $\alpha|x| > 1 \Rightarrow \sum b_k$ αποκλίνει, $(|x| > 1/\alpha)$, $\mathbb{R} = 1/\alpha$

$\sum \frac{x^k}{k!}$ (Βρείτε το διάστ. συγκλ.)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k = \sum \frac{x^k}{k!}, \quad \alpha_k = \frac{1}{k!}$$

$$\left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right| = \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \frac{k!}{k!(k+1)} = \frac{1}{(k+1)}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k^2}, \quad \alpha_k = \frac{2^k x^k}{k^2}, \quad \left|\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\right| = \frac{2^k \cdot 2/(k+1)^2}{2^k/k^2} \to 2 = \alpha$$

$R = 1/2 \Rightarrow$ στο διάστημα $(-1/2, 1/2)$ η δυν. συγκλίνει απόλυτα ενώ εκτός του $[-1/2, 1/2]$ αποκλίνει.

$R = \max\{|x| \sum a_n x^n\} = 1/2$

i) $x = 1/2$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum 2^n \cdot (1/2)^n / n^2 = \sum \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει

ii) $x = -1/2$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum 2^n (-1/2)^n / n^2 = \sum \frac{1}{n^2}$ $\quad 1/n^2 \searrow 0$

Άρα $[-1/2, 1/2]$

$\sum a_n$ συγκλίνει, $a_n > 0$ $\Big\}$ $\sum a_n^2$ συγκλίνει.

$|a_n^2| = |a_n| \cdot |a_n| \leq 1 \cdot |a_n| \overset{a_n>0}{=} a_n \qquad |a_n| \leq 1 \quad (\forall n \geq n_0)$

$\to \sum a_n^2$ συγκλίνει απόλυτα

~~...~~

$a_n = (-1)^n b_n$

$a_n^2 \Rightarrow b_n^2$

$\sum b_n^2$ αποκλίνει

$\sum (-1)^n b_n$ συγκλίνει

$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει.

$\sum a_n$, $a_n = \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n \geq 0$, $(\forall n = 1, 2, \dots)$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n} - 1 \to 1 - 1 = 0 < 1$

=> από κριτήριο λόγου η σειρά συγκλίνει

$\sum a_n$, $a_n = \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\sqrt[n]{n}} - 1$

$\sqrt[n]{n} = a_n + 1$

$n = (a_n + 1)^n \geq 3 > e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $(\forall n \geq 3)$

$a_n \geq \frac{1}{n}$ $\forall n \geq 3$ => κρ. σύγκ. $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$ αποκλ. => $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλ.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}$ $\quad 0 < a_n = |a_n| = \frac{|2 + (-1)^n|}{2^n} \leq \frac{3}{2^n}$

η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ συγκλίνει κρ. σύγκρ. => $\sum a_n$ συγκλ.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$ = $a_n > 0$ -> $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{a_n} = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}\right]^{1/n} =$

$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \to \frac{1}{e} < 1$

Για ποια $p \in \mathbb{R}$ συγκλίνει η σειρά $\sum u^p \left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u+1}}\right)$

$$a_u = u^p \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u+1}}\right) = u^p \cdot \left(\frac{\sqrt{u+1} - \sqrt{u}}{\sqrt{u+1}\sqrt{u}}\right)$$

$$\frac{u^p[(u-1)-u]}{\sqrt{u+1}\cdot\sqrt{u}(\sqrt{u+1}+\sqrt{u})} \qquad \frac{p}{3/2} \sim \sum \frac{1}{u^{3/2-p}}$$

$$\frac{a_u}{b_u} = \frac{u^p \cdot u^{3/2-p}}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{u+1}(\sqrt{u}+\sqrt{u+1})} = \frac{1}{1\sqrt{1+1/u}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{u}}\right)} \xrightarrow{u\to\infty} \frac{1}{1\cdot 1(1+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_u \frac{1}{u^a} \qquad a = \frac{3}{2} - p \Rightarrow p < \frac{1}{2}$$

$$\sum \frac{u+\sqrt{u}}{2u^3-1} \sim \sum \frac{1}{u^2} \qquad b_u = 1/u^2$$

$$a_u = \frac{u+\sqrt{u}}{2u^3-1}$$

$$\frac{a_u}{b_u} = \frac{u+\sqrt{u}\,/\,(2u^3-1)}{1/u^2} = \frac{u^2(u+\sqrt{u})}{2u^3-1} = \frac{u^3+u^{5/2}}{2u^3-1} \to \frac{1}{2}$$

$$\sum_{u=1}^{\infty} \frac{u!}{u^u}, \quad \left|\frac{a_{u+1}}{a_u}\right| = \frac{\frac{(u+1)!}{(u+1)^{u+1}}}{\frac{u!}{u^u}} = \cancel{(u+1)}\frac{u^u}{(u+1)^{u+\cancel{1}}} = \left(\frac{u}{u+1}\right)^u = \left(\frac{u+1}{u}\right)^{-u} =$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{u}\right)^u} \to \frac{1}{e} < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^k} \qquad x \in \mathbb{R}$$

i) $|x|>1$

Θα την συγκρ. με $\underbrace{\sum_k \left|\frac{1}{x^k}\right|}_{b_k}$ την $\underbrace{\sum \left|\frac{1}{1+x^k}\right|}_{a_k}$

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{|x|^k}{|1+x^k|} = \frac{1}{\left|\left(\frac{1}{x}\right)^k+1\right|} \to \frac{1}{0+1} = 1 \in (0,+\infty)$$

$x=1$ αποκλίνει

$|x|<1$

$$a_k = \frac{1}{1+x^k} \to \frac{1}{1+0} = 1 \neq 0 \to a_k \not\to 0$$

$|x^k|<1 \Rightarrow 1+x^k>0$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}\right)$$

$$\lim \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-1/2} = 1$$

$S_1 = 1/2$

$S_2 = 1/2 + 1/3$

$$S_4 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right)$$

$$S_{2n} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) \to 3/2, \quad \boxed{n \to +\infty} \quad \lim S_n = ;$$

$1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

$S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2^{n+1}} \to \frac{3}{2} + 0 = \frac{3}{2} = \lim S_{2n} \Rightarrow \exists \lim_{n} S_n = 3/2$